Ejercicio 11 de la relación de problemas. Determinar si los siguientes conjuntos de $M_2(\mathbb{R})$ son subespacios vectoriales:

a) H = $\left\{A \in M_2(\mathbb{R}) : A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix}\right\}$.

b) H = $\left\{A \in M_2(\mathbb{R}) : A = \begin{pmatrix} a & 1+a \\ a & c \end{pmatrix}\right\}$.

c) H = $\left\{A \in M_2(\mathbb{R}) : A = \begin{pmatrix} -b & a \\ a & b \end{pmatrix}\right\}$.

d) H = $\left\{A \in M_2(\mathbb{R}) : A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ a & 0 \end{pmatrix}\right\}$.

a) Para resolver este apartado vamos a usar la definición de subespacio vectorial, es decir, vamos a probar que la suma de dos vectores de H y el producto de un escalar por un vector de H siguen siendo elementos de H:

1) Dados $A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & c_1 \end{pmatrix}$ y $A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & c_2 \end{pmatrix}$ dos vectores de H, veamos si su suma está en H:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ -b_1-b_2 & c_1+c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ -(b_1+b_2) & c_1+c_2 \end{pmatrix} \in H$$

Como la componente 2, 1 es el opuesto del término de la posición 1, 2

2) Por otra parte, dado $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix} \in H$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ se tiene:

$$\alpha \begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha(-b) & \alpha c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ -\alpha b & \alpha c \end{pmatrix} \in H$$

De nuevo, la componente 2, 1 es el opuesto de la componente 1, 2.

Por tanto, H es un subespacio vectorial de $M_2(\mathbb{R})$.

b) H = $\left\{A \in M_2(\mathbb{R}) : A = \begin{pmatrix} a & 1+a \\ a & c \end{pmatrix}\right\}$.

Este apartado es fácil pues para que H sea subespacio vectorial, lo primero que ha de ser es subgrupo, y por tanto, debe de contener al elemento cero y en este caso es fácil ver que la matriz cuadrada de orden dos cuyas componentes son todas nulas no está en H:

En efecto, si $\begin{pmatrix} a & 1+a \\ a & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ entonces $a = 0 = c$ y en tal caso la componente de la posición 1, 2 sería 1 y no cero. Luego $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin$ H y por tanto H no es subespacio vectorial de $M_2(\mathbb{R})$.

d) H = $\left\{A \in M_2(\mathbb{R}) : A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ a & 0 \end{pmatrix}\right\}$.

Para realizar este apartado vamos a utilizar la caracterización. En primer lugar es fácil ver que en este caso el elemento cero si pertenece a H:

En efecto, si $\begin{pmatrix} 0 & b \\ a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ entonces $a = 0 = b$. Luego existe valores de a y b que nos permiten decir que $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in$ H. Pero esto no nos asegura que H sea subespacio vectorial de $M_2(\mathbb{R})$.

Dados $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ a_1 & 0 \end{pmatrix}$ y $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & b_2 \\ a_2 & 0 \end{pmatrix}$ dos vectores de H, y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ veamos si la combinación lineal $\alpha A_1 + \beta A_2 \in$ H:

$$\alpha \begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ a_1 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & b_2 \\ a_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha b_1 \\ \alpha a_1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \beta b_2 \\ \beta a_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha b_1 + \beta b_2 \\ \alpha a_1 + \beta a_2 & 0 \end{pmatrix} \in H$$

En este caso, vemos como las componentes de la diagonal principal ambas son cero.

Por tanto, H es un subespacio vectorial de $M_2(\mathbb{R})$.